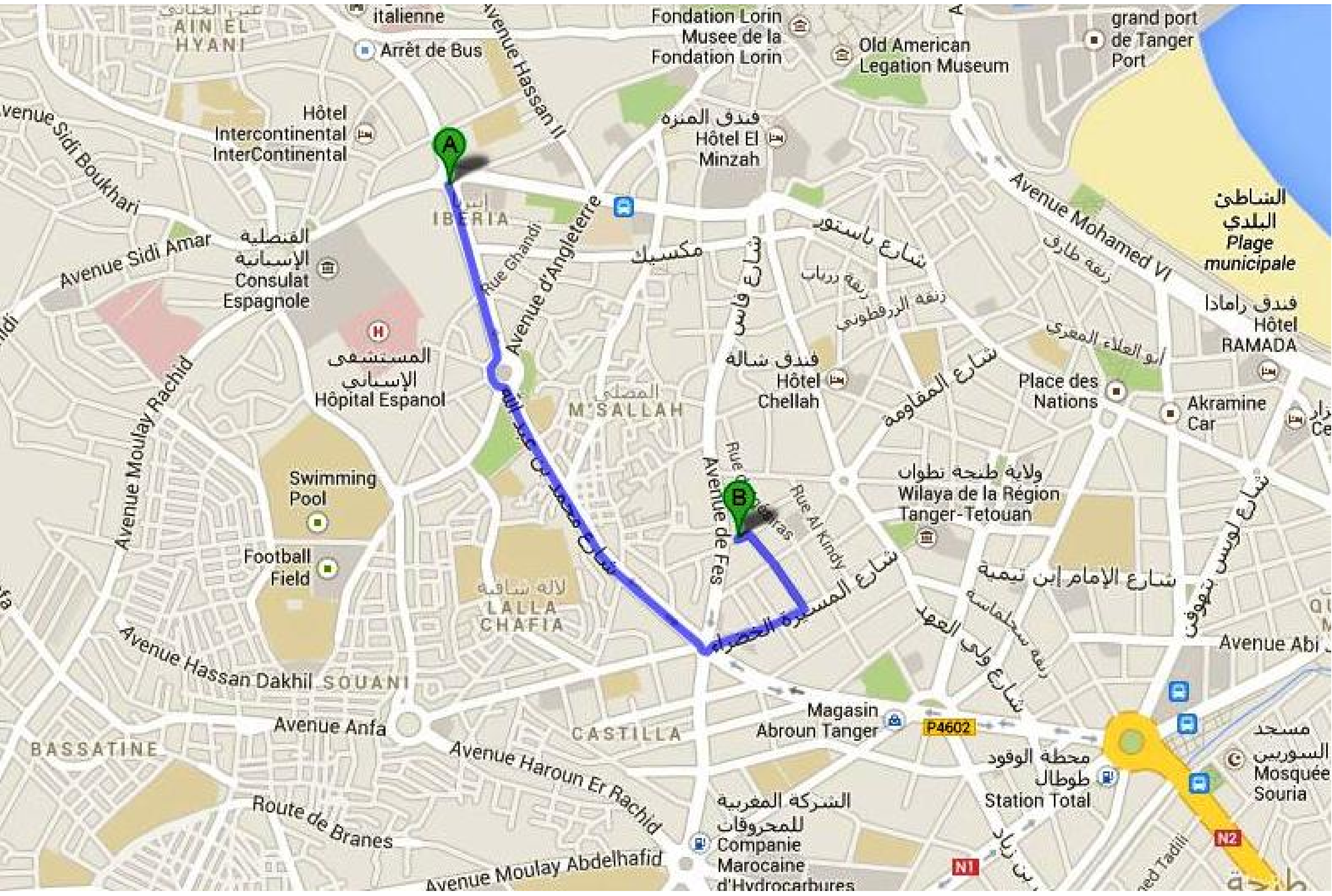
www.al9ahira.wordpress.com



ROYAUME DU MAROC
المملكة المغربية

Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique
et de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
École Nationale Supérieure de l'Informatique et d'Analyse des Systèmes

ENSIAS

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs
et Établissements Assimilés

Session 2012

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Filière **TSI**

Durée 4 heures

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\textit{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exemple d'utilisation des matrices et déterminants de Vandermonde

Le sujet comporte quatre parties ; les trois dernières constituent des applications de résultats établis dans la première partie, et sont indépendantes entre elles.

Notations et rappels

Dans ce sujet, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$–espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes ; $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est la $\mathbb{K}$–algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$; on note aussi I_n (resp. 0_n) la matrice identité (resp. la matrice nulle) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\mathrm{rg}(A)$ son rang ; si de plus $n = p$, la trace de A est notée $\mathrm{Tr}(A)$ et son déterminant est noté $\det(A)$ ou $|A|$.

Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté χ_A ; on rappelle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = |A - \lambda I_n|.$$

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout n-uplet $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ la matrice, dite de Vandermonde, définie par

$$V_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On note $|V_n(x_1, x_2, ..., x_n)|$ le déterminant de la matrice $V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$; on l'appelle le déterminant de Vandermonde du n-uplet $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

1ère Partie
Expression d'un déterminant de Vandermonde

On désigne par $x_1, x_2, ..., x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ où n est un entier $\geqslant 2$.

1.1. Si les scalaires $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas distincts, justifier que $|V_n(x_1, x_2, ..., x_n)| = 0$.

1.2. Calculer $|V_2(x_1, x_2)|$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $n \geqslant 3$ et que les scalaires $x_1, x_2, ..., x_n$ sont deux à deux distincts.

1.3. On note F la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par

$$F(x) = |V_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x)|.$$

1.3.1. Montrer que la fonction F est polynomiale de degré $\leqslant n-1$; préciser le coefficient de son terme de plus haut degré.

On pourra développer le déterminant en question par rapport à une colonne bien choisie.

1.3.2. En utilisant les propriétés des déterminants, montrer que les scalaires $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ sont des racines de F.

1.3.3. En déduire que

$$|V_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x)| = |V_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})| \prod_{k=1}^{n-1}(x - x_k).$$

1.4. Montrer alors que $|V_n(x_1, x_2, ..., x_n)| = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$.

1.5. Justifier que la matrice $V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ est inversible.

1.6. **Une application :** Soient a, b et c trois réels deux à deux distincts. Montrer, en utilisant l'expression d'un déterminant de Vandermonde que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 2a \\ a^3 & b^3 & c^3 & 3a^2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-c)^2(c-b).$$

2ème Partie
Une première application

Soit n un entier $\geqslant 2$; on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice A comptées avec leur ordre de multiplicité.

On pose $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $m_{i,j} = \mathrm{Tr}(A^{i+j-2})$ pour tout $(i,j) \in \{1, 2, ..., n\}^2$.

2.1. Vérifier que la matrice M est symétrique.

2.2. Justifier que la matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2.3. Montrer que, pour tout couple (i,j) de $\{1, 2, ..., n\}$,

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{i-1}\lambda_k^{j-1}.$$

2.4. En déduire que $M = V\,{}^tV$, où $V = V_n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

2.5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ pour que la matrice M soit inversible.

2.6. On suppose dans la suite que la matrice A est réelle et que les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont des nombres réels.

2.6.1. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont positives.

2.6.2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ pour que la matrice M soit définie positive.

3ème Partie
Application à la diagonalisation d'une matrice de Frobenius

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

A est appelée la matrice de Frobenius ou la matrice compagnon du polynôme

$$P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

3.1. Montrer que le rang de A est supérieur ou égal à $n-1$ et que $\text{rg}(A) = n$ si, et seulement si, $a_0 \neq 0$.

3.2. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A et l'exprimer en fonction de P. On pourra développer le déterminant $|A - \lambda I_n|$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, par rapport à la dernière ligne.

3.3. On suppose que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre de A associé à λ. Quelle est sa dimension ?

3.4. Montrer alors que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, le polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ et a ses racines simples.

3.5. On suppose que le polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ et admet n racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Sans calculer l'inverse de $V_n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, montrer que la matrice

$$(V_n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n))^{-1} A V_n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

est diagonale et la préciser.

3.6. **Application :** On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 11 & 6 \end{pmatrix}$.

3.6.1. Déterminer les entiers naturels qui sont des racines de χ_B.

3.6.2. Diagonaliser la matrice B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en précisant la matrice de passage et son inverse.

4ème Partie
Application aux matrices nilpotentes

Soit n un entier $\geqslant 2$; on considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n+1}$, deux à deux distincts, tels que les matrices

$$A + \lambda_1 B, A + \lambda_2 B, ..., A + \lambda_{n+1} B$$

soient toutes nilpotentes.

4.1. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente alors $M^n = 0_n$.

4.2. Montrer que, pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, la matrice $(A+\lambda B)^p$ peut s'écrire sous la forme

$$(A + \lambda B)^p = A^p + \lambda C_1 + ... + \lambda^{p-1} C_{p-1} + \lambda^p B^p,$$

où les matrices $C_1, ..., C_{p-1}$, éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sont indépendantes de $\lambda \in \mathbb{K}$. On pourra faire un raisonnement par récurrence.

4.3. On note donc $D_1, ..., D_{n-1}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(A + \lambda B)^n = A^n + \lambda D_1 + ... + \lambda^{n-1} D_{n-1} + \lambda^n B^n.$$

Considérons un couple (i, j) d'éléments de $\{1, ..., n\}$ et notons x_0 (resp. $x_1, ..., x_{n-1}, x_n$) l'élément de la matrice A^n (resp. $D_1, ..., D_{n-1}, B$) se trouvant à la i-ième ligne et la j-ième colonne.

4.3.1. Justifier que, pour tout $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n+1}\}$,

$$x_0 + \lambda x_1 + ... + \lambda^{n-1} x_{n-1} + \lambda^n x_n = 0.$$

4.3.2. Préciser la matrice du système ainsi obtenu à la question précédente, et dont les inconnues sont $x_0, x_1, ..., x_n$.

4.4. Montrer alors que les matrices A et B sont nilpotentes.

FIN DE L'ÉPREUVE

La Librairie Papeterie Le Caire a maintenu, depuis son origine, comme principal objectif l'entière satisfaction de l'étudiant en lui présentant l'un des plus larges choix de livres universitaires.

Ainsi, après de nombreuses années d'adaptation continue à la demande de l'étudiant et dans le but d'amélioration constante, nous avons créé ce site pour vous atteindre plus rapidement, en maintenant les niveaux de qualité qui nous caractérisent.

La Librairie Papeterie Le Caire se propose également, à travers ce site, de contribuer, dans la mesure du possible, à fournir toute l'information recherchée par l'étudiant et de participer à sa réussite académique.

Coordonnées de Contact

pour les personnes désireuses d'acquérir des livres de Prépas

7, rue d'Égypte
Tanger, Maroc

Tél : (0539) 34 33 20

http://www.al9ahira.wordpress.com/